

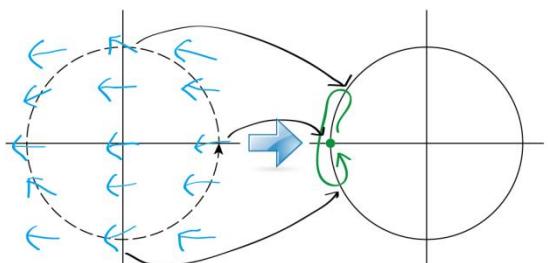
# 超伝導・超流動入門

位相空間 A から位相空間 B への連続写像  $f$  が全単射で、その逆写像も連続であるとき、 $f$  を同相写像 (homeomorphism) という。A と B との間に同相写像が存在するとき、A と B は同相であるという。



対称性の破れのトポロジーがその系の欠陥の種類を決定する。

□ 一様な速度場(欠陥=渦はない)

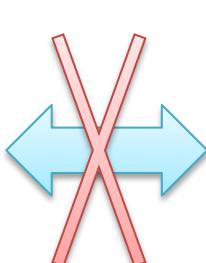


速度場

位相空間への写像

渦の数が同じ状態同士は連続変形でつながるが、渦の数が異なる状態は決して連続変形ではつながらない。

□ 渦が1本



速度場

位相空間への写像

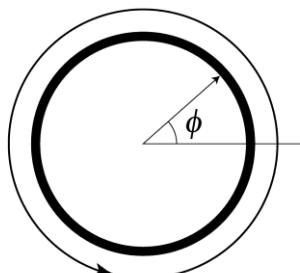
秩序空間の中で許される位相同型  
でない閉曲線の種類  
= その秩序状態のトポロジーで許さ  
れるdefectの種類

# 超伝導・超流動入門

## □ ヘリウム4、(s波)超伝導体

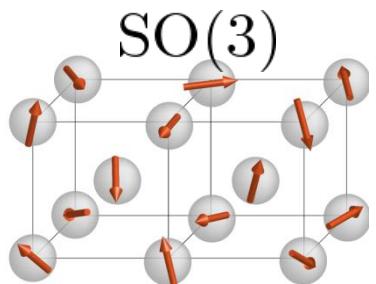
波動関数のゲージ対称性だけが破れるとき

$$\psi e^{i\phi} \rightarrow \psi e^{i\phi_0}$$

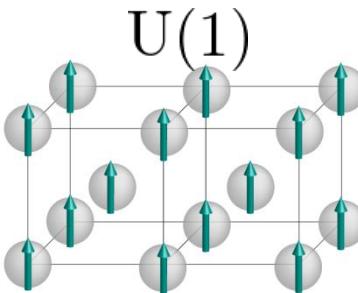


$$G = U(1)_\phi$$

## □ Heisenbergスピンの磁気転移

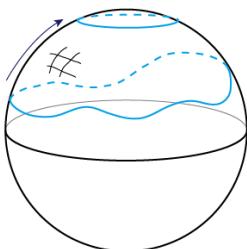


常磁性: 3次元空間の任意の回転操作に対して不変



強磁性: スピンが特定の方向を向く

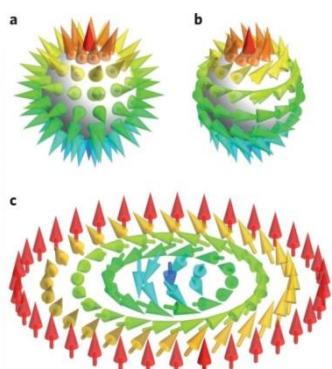
$$\pi_1(S^2) = 0$$



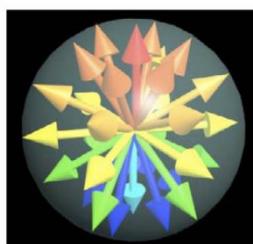
$S^2$ の部分からは渦が出てこない

この場合、もう一次元上のホモトピーがnon-trivial

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$$



Mapping onto  
the unit sphere

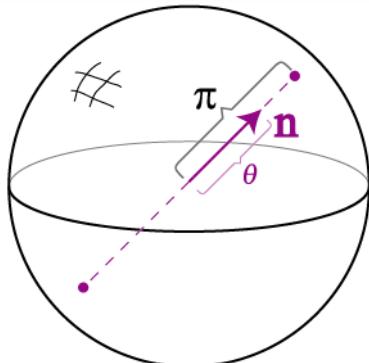


スカーミオン渦: MnSiなどの磁性体中の渦として観測されている  
Nagaosa-Tokura (2012)  
Phys. Scr. T146, 014020

# 超伝導・超流動入門

$R(\hat{n}, \theta)$  in SO(3)

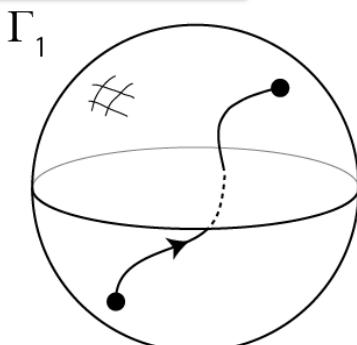
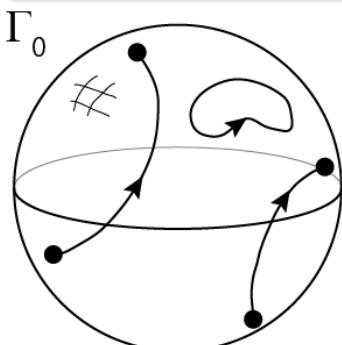
3次元空間における任意の回転はn軸周りの $\theta$ 回転 $R(n, \theta)$ で表現できる。



$$\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$$

□ 涡の分類: 二回まわると元に戻る!  
 $= \dots, -2 = 0, -1, 0, 1, 2 = 0, \dots$

[ SO(3)空間内の2種類のdefects ]



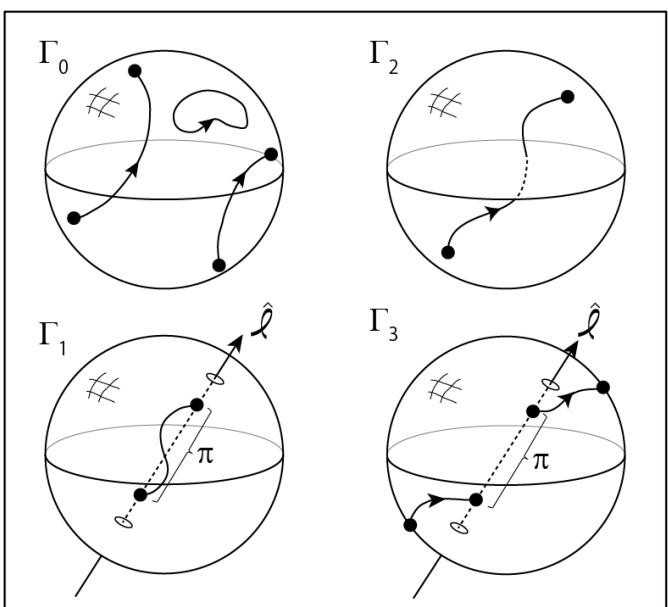
□  $^3\text{He-A}$  phase

$$\mathrm{SO}(3)_S \times \mathrm{SO}(3)_L \times \mathrm{U}(1)_\phi \rightarrow \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}_2$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mathrm{SO}(3)_S \times \mathrm{SO}(3)_L \times \mathrm{U}(1)_\phi}{\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}_2} \\ &= \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{S}^2 / \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_2$ のところまで入れてちゃんと考えると4種類の渦

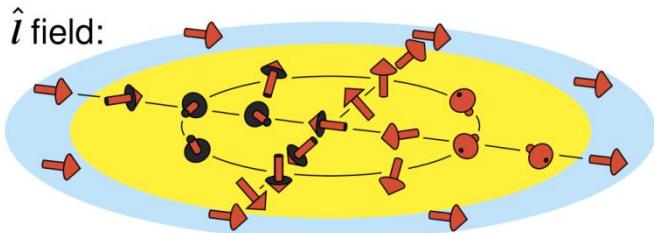
$$\pi_1(\mathrm{SO}(3)/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_4$$



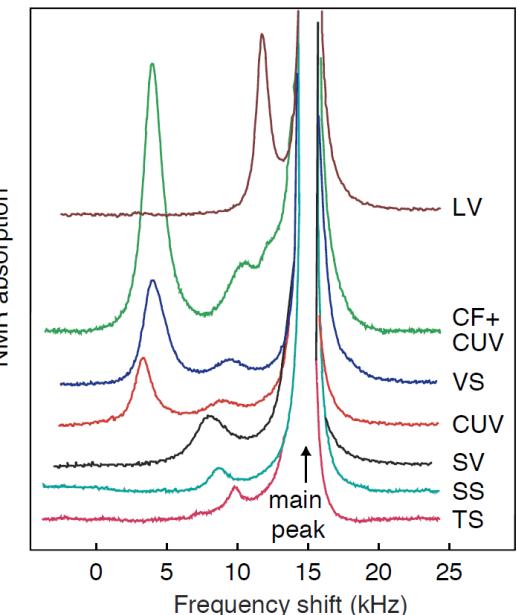
# 超伝導・超流動入門

## □ 超流動3He-A phase

中心に渦芯のない渦を作ることができる  
(soft core vortex, continuous vortex)

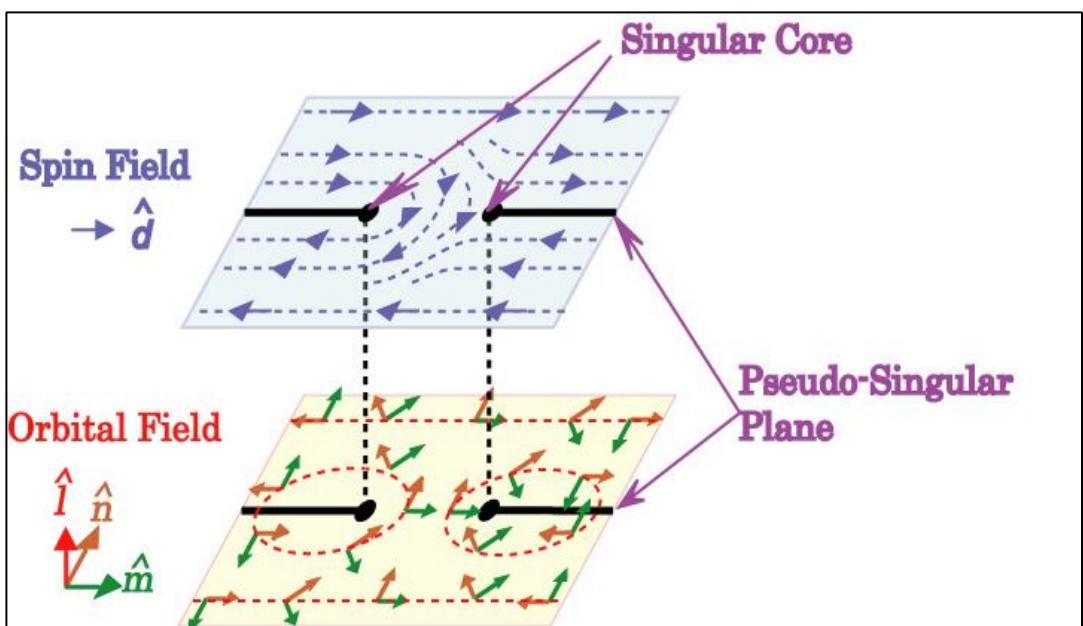


NMRで実験的に確認されている。  
O. V. LOUNASMAA & E. THUNEBERG  
*Proc. Natl. Acad. Sci.*, **96**, 7760–7767 (1999)

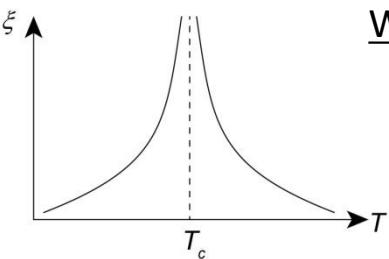


## Half Quantum Vortex

$n = 1/2$  , Phase  $\pi$  + Spin  $\pi$



# 超伝導・超流動入門



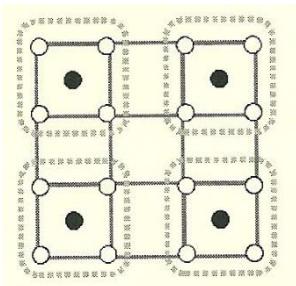
What is “renormalization-group” method?

Near a phase transition, the correlation length becomes very long. So, one can make an average over the length of  $1 < b \ll \xi$ .

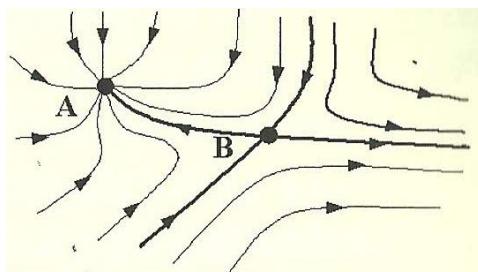
$$\text{Unit} \quad x \rightarrow x' = xb$$

$$\text{Correlation length} \quad \xi \rightarrow \xi' = \xi/b$$

$$\text{Hamiltonian} \quad \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' = R(b)\mathcal{H}$$



Coarse graining  
4 spins ( $\circ$ )  $\rightarrow$  1 spin ( $\bullet$ )



Check how the system evolves due to RG.  
Find stable fixed points (A) or unstable points (B).

系の詳細によらず、対称性と次元だけで振る舞いが決まる。

## □ Case study: 1D Ising

$$H = -J \sum_{i=0}^{N-1} S_i S_{i+1}.$$

$$Z = \sum_{S_0=\pm 1} \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_{N-1}=\pm 1} \left( \prod_{i=0}^{N-1} e^{\frac{J}{k_B T} S_i S_{i+1}} \right)$$

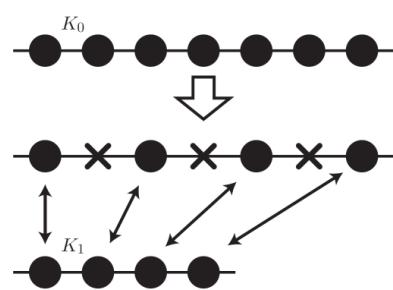
$$= \sum_{S_0=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \cdots \sum_{S_{N-2}=\pm 1} \left( \prod_{i=even}^{N-1} e^{K_0 S_i (S_{i-1} + S_{i+1})} \right)$$

$$= \sum_{S_0=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \cdots \sum_{S_{N-2}=\pm 1} \left( 2^{N/2} \prod_{i=odd}^{N-1} \cosh K_0 (S_{i-1} + S_{i+2}) \right)$$

$$= (2e^{L_1})^{N/2} \sum_{S_0=\pm 1} \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_{N/2-1}=\pm 1} \prod_{i=0}^{N/2-1} e^{K_1 S_i S_{i+1}}$$

変数変換

$$K_1 = L_1 = \frac{1}{2} \ln \cosh 2K$$



奇数だけ先に和をとって  
2 spins  $\rightarrow$  1 spin

結局、  
 $K \rightarrow K_1 = \frac{1}{2} \ln \cosh 2K < K$

Fixed point:  $K = 0$  (常磁性)

Unfixed point:  $K = \infty$

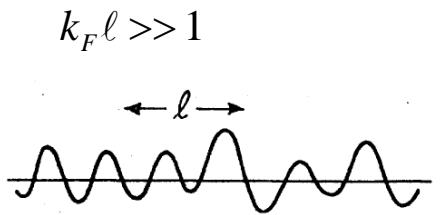


# 超伝導・超流動入門

## □ Case study 2: 金属の伝導性と次元

- Conductivity of metal (Drude description)  
Low impurity density, extended Bloch state

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \sim \frac{ne^2}{m} \frac{\ell}{v_F} \sim \frac{ne^2}{\hbar} \frac{\ell}{k_F}$$



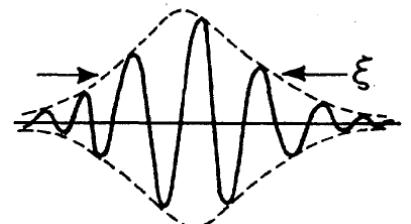
Conductance  $g$  in the sample of scale size  $L$

$$g(L) = \sigma L^{d-2}$$

- Anderson localization  
High impurity density

$$|\psi(r)| \sim \exp(|r - r_0|/\xi)$$

$$g(L) \propto \exp(-L/\xi)$$



### □ Scaling analysis: logarithmic derivative

$$\beta(g) \equiv \frac{d \ln g}{d \ln L}$$

- Large conductance  $g \gg g_c$

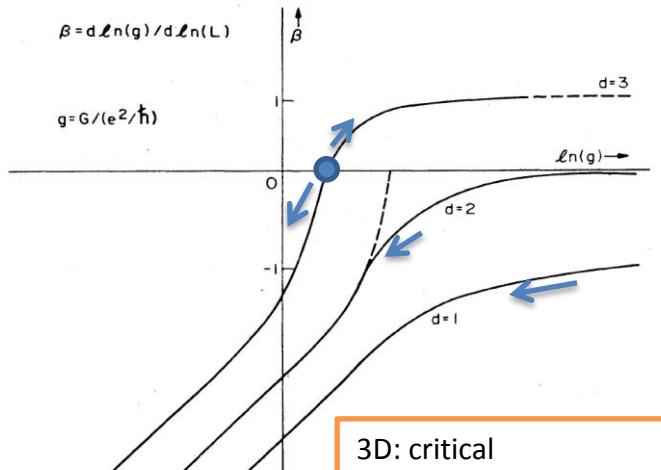
$$g(L) = \sigma L^{d-2}$$

$$\beta(g) = (d-2)$$

- Small conductance  $g \ll g_c$

$$g(L) \propto \exp(-L/\xi)$$

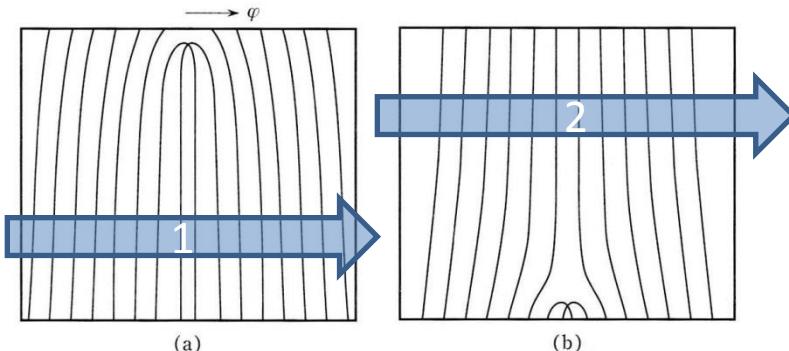
$$\beta(g) = \ln(g/g_c)$$



3D: critical conductance  
2D or less: No metal for finite  $g$ .

# 超伝導・超流動入門

## □ 孤立渦の運動による $2\pi$ phase slip



1と2で左から右の位  
相差が $2\pi$ 変化。  
⇒超流動速度の減少

6.3図  $2\pi$  の位相スリップによる位相勾配の減少。  
(a)  $\pi/2$  間隔の等位相線の中に渦糸が上部に発生。  
(b) 渦糸が下部に移動,  $2\pi$  の位相スリップが起こる。

- 位相スリップによるエネルギー損失を確認した実験  
Avenel-Varoquaux PRL 55, 2704 (1985)

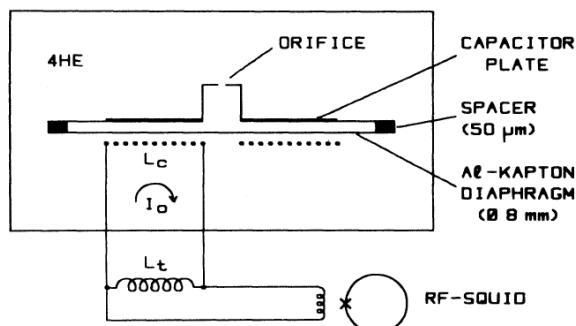


FIG. 1. Schematic drawing of the experimental cell.

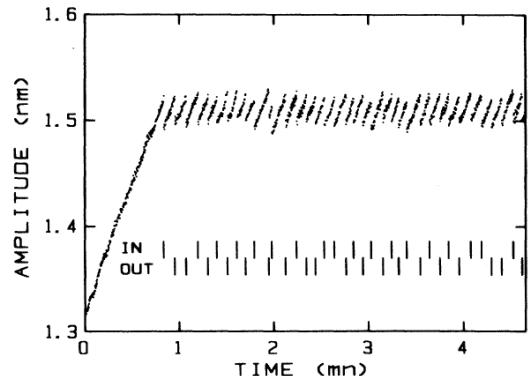
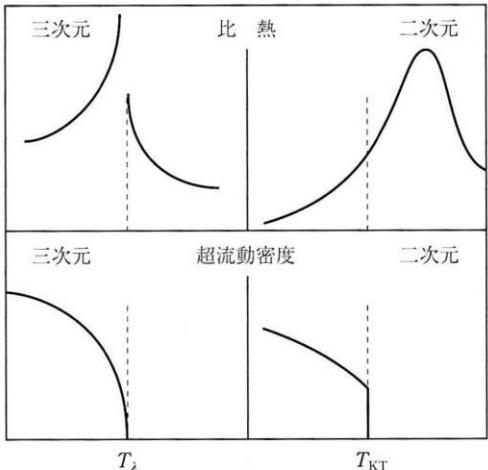


FIG. 2. Peak amplitude of the membrane oscillation vs time for a constant drive power of  $2.4 \times 10^{-18}$  W. The high correlation between inward and outward jumps can be seen from the ticks drawn below each jump.

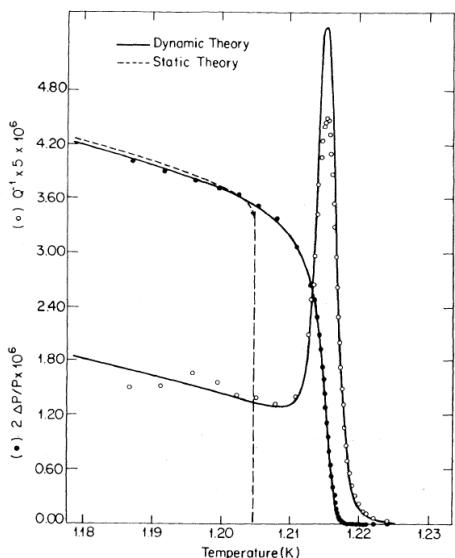
# 超伝導・超流動入門



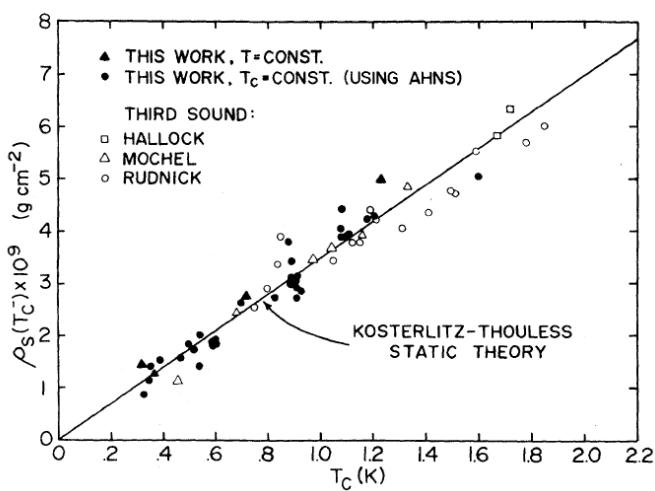
8.1図 二次元および三次元における比熱と超流動密度の転移点近傍での温度変化の概念図

## 二次元における相関関数

$$\rho_1(r) = \langle \Psi^*(r)\Psi(0) \rangle \propto r^{-\frac{k_B T}{2\pi K_0}}$$



ねじれ振り子によって観測された2次元超流動ヘリウムの相転移。  
Bishop-Reppy, PRL 40, 1727 (1978)



KT転移における“universal jump”

$$\frac{\sigma_s(T_{KT})}{T_{KT}} = \frac{2}{\pi} \frac{k_B m^2}{\hbar^2}$$